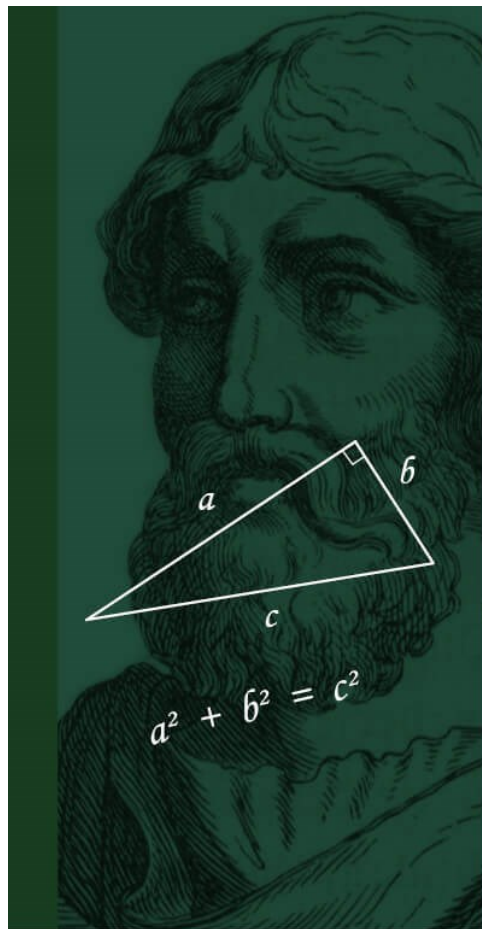


## Bijlage bij het hoorcollege *Reis door de wiskunde*



### REIS DOOR DE WISKUNDE

EEN HOORCOLLEGE  
WISKUNDE VOOR ALFA'S

door Frits Beukers

### Inhoudsopgave

[Frits Beukers](#)

[H1. Wat is Wiskunde?](#)

[H2. Getallen: hele getallen, priemgetallen en beroemde problemen](#)

[H3. Oneindigheid: zijn er meer breuken dan hele getallen?](#)

[H4. Meetkunde: eindig of oneindig? Zit er een grens aan ons heela?](#)

[H5. Chaos: grenzen aan de voorspelbaarheid van natuurlijke verschijnselen](#)

[H6. Cryptografie](#)

[Voorbeelden](#)

[Aanbevolen literatuur](#)

[Colofon](#)

## Frits Beukers



Prof. dr. Frits Beukers studeerde aan de universiteit van Leiden waar hij ook promoveerde. Na een jaar doorgebracht te hebben op het Institute for Advanced Study te Princeton werd hij in Leiden aangesteld als wetenschappelijk medewerker in de wiskunde. In 1986 werd hij benoemd tot universitair hoofddocent aan de universiteit van Utrecht. Van zijn hand verschenen een groot aantal artikelen op het gebied van getaltheorie, waaronder Getaltheorie voor beginners. Hij schreef het boekje *Pi*, wat speciaal bedoeld is voor een niet-wiskundig publiek.

# Synopsis van het hoorcollege *Reis door de wiskunde*

## H1. Wat is wiskunde?

Is wiskunde moeilijk, saai, een vak voor nerds? Het is waar dat de ervaringen van velen met de wiskunde niet positief zijn. Men moet echter bedenken dat deze slechte ervaringen vaak voortkomen uit de schooltijd. Daarin wordt de basis van de wiskunde bijgebracht, beginnend bij de gehele getallen op kleuterniveau en eindigend bij dingen als differentiëren en integreren op het VWO. Daar is niets mis mee, maar deze opbouw gaat stap voor stap, waarbij elke stap voortbouwt op de voorgaande. Heb je onderweg een stap gemist, dan is dat funest, want daardoor zullen de problemen met de volgende stappen steeds groter worden. Met als gevolg dat velen onderweg afhaken.

In deze lezingen zullen we laten zien dat wiskunde desondanks heel veel boeiende kanten heeft, zelfs voor degenen die ooit zijn afgehaakt. Daartoe zullen we een aantal onderwerpen behandelen die op school niet of nauwelijks aan bod komen, maar die toch voor een breed publiek aansprekend zijn. Een aantal van deze onderwerpen stamt uit het oude Griekenland. Een aantal andere is echter van heel recente datum. Dit weerspiegelt het feit dat de wiskunde nog steeds niet 'af' is.

Een groot deel van de schoolwiskunde was in de 17e eeuw al bekend en men zou daardoor kunnen denken dat dat alles is. Maar sinds de 17e eeuw heeft men absoluut niet stilgezeten en is er in die tussentijd heel veel boeiends bijgekomen. Zeker in de afgelopen decennia is de ontwikkeling van de wiskunde in een stroomversnelling geraakt. Lang niet alle aspecten hiervan zijn voor een breed publiek toegankelijk, maar er blijft toch nog genoeg interessants te vertellen over.

## H2. Gehele getallen

Neem het volgende rijtje voor ogen: 1,2,3,4,... Dit zijn de natuurlijke getallen die iedereen kent. Wat minder bekend is het bestaan van een tak van de wiskunde, de getaltheorie, die deze getallen tot onderwerp van studie gemaakt heeft. De getaltheorie vindt zijn oorsprong in de oude Griekse tijd. Boek IX van de Elementen van Euclides gaat in zijn geheel over gehele getallen. In dit vakgebied spelen zaken als priemgetallen en diophantische vergelijkingen van oudsher een belangrijke rol. Maar ook nu nog worden er belangrijke ontdekkingen gedaan. Bijvoorbeeld de oplossing van het 350 jaar oude Fermatvermoeden in 1994 en de ontdekking van een polynomiale priemtest in 2001.

De getaltheorie is bij uitstek het vak waarin eenvoudig lijkende vragen gesteld kunnen worden, die vervolgens vrijwel onmogelijk zijn om op te lossen. De beroemde wiskundige Carl Friedrich Gauss, niet geheel onbevooroordeeld, noemde de wiskunde de koning van de wetenschappen en de getaltheorie de koningin van de wiskunde. In de ruim tweeduizend jaar dat getaltheorie bestaat, heeft het altijd gegolden als het zuiverste vak binnen de zuivere wiskunde. Die onschuld heeft de getaltheorie een jaar of dertig geleden verloren, toen men ontdekte dat het belangrijke toepassingen in de cryptografie, of geheimschriftkunde heeft. Maar daarover in het laatste hoofdstuk meer.

## H3. Oneindig

Hoewel nog nooit iemand oneindig veel dingen tegelijk heeft kunnen waarnemen, heeft dit begrip toch stevig postgevat in het menselijk bewustzijn. Misschien kent u de paradoxen van Zeno (bijvoorbeeld Achilles en de schildpad). Sinds die oude Griekse tijd heeft het oneindige met zijn paradoxen de mensheid niet meer losgelaten. Voor een goede ontwikkeling van de wiskunde heeft men op den duur geleerd met dit oneindige in het reine te komen. Dit is een lang en pijnlijk proces geweest, met een heuse crisis aan het begin van de 20e eeuw. Uiteindelijk is uit deze ontwikkeling een compromis voortgekomen, dat nu algemeen binnen de wiskunde wordt geaccepteerd. Een belangrijke stap in die richting werd gezet door Georg Cantor, de grondlegger van de

verzamelingen leer aan het eind van de 19e eeuw. Onder anderen ontdekte Cantor dat er verschillende gradaties in het begrip oneindig bestaan, en dat er op een rechte lijn evenveel punten liggen als in het platte vlak. Wij zullen proberen hier iets van uit te leggen.

#### **H4. Meetkunde**

De stelling van Pythagoras:  $a^2 + b^2 = c^2$ , de som van de hoeken van een driehoek is 180 graden, de diagonalen van een parallellogram snijden elkaar in het midden. Dit zijn allemaal uitspraken uit de meetkunde, beter gezegd de vlakke meetkunde of planimetrie. Deze klassieke tak van wiskunde wordt ook nu nog op de middelbare school onderwezen, hoewel minder intensief dan vroeger. Verreweg het grootste deel van de moderne meetkunde komt op school echter niet aan bod. Projectieve meetkunde, differentiaalmeetkunde, topologie, algebraïsche meetkunde, eindige meetkunde, dit zijn allemaal takken van de meetkunde waar u pas na uw schooltijd wellicht eens van gehoord heeft, of helemaal niet.

Een groot deel van de moderne meetkunde is voortgekomen uit vragen die de geleerden nog steeds bezig houden: in wat voor wereld leven wij? Hoe we moeten denken over werelden in vier of meer dimensies, gekromde ruimte, (on)eindigheid van de ruimte waarin wij leven? De basis van ons denken over deze vragen wordt gelegd door differentiaalmeetkunde en topologie. Deze takken van de meetkunde bevatten ook de wiskundige grondslagen van bijvoorbeeld de relativiteitstheorie en de moderne elementaire deeltjes fysica.

#### **H5. Chaos**

Doordat een vlinder in Brazilië zijn vleugels uitslaat, raast een jaar later een orkaan door Texas. Deze gedachte, dat kleine oorzaken grote gevolgen kunnen hebben, is het ultieme beeld dat men kan hebben bij de chaostheorie. Eeuwenlang heeft men binnen de mechanica systemen bestudeerd waarvan de afloop min of meer voorspelbaar was. Reden hiervoor was dat dit soort systemen zich leenden voor een wiskundige beschrijving. Een klassiek voorbeeld is de gewone slinger. Men beseftte echter wel degelijk dat er ook mechanische systemen waren die zich niet voor een dergelijke behandeling leenden. Bijvoorbeeld een slingerbeweging waarbij we het ophangpunt periodiek op en neer bewegen. Of, nog beruchter, het drielichamenprobleem waarbij we drie hemelobjecten hebben, sterren bijvoorbeeld, die zich onder invloed van elkaars zwaartekracht bewegen.

Voor dergelijke systemen is het vrijwel onmogelijk een volledige oplossing te geven. Dank zij de computer is het de laatste veertig jaar wel mogelijk geworden om te zien wat voor gedrag deze systemen kunnen hebben. Door deze computerexperimenten is men zich gaan realiseren dat dit gedrag volkomen onvoorspelbaar kan zijn, ondanks het feit dat ze zich volgens eenvoudige wetten ontwikkelen. We noemen dit chaotische systemen. Er zijn weinig wiskundige begrippen die de afgelopen jaren zo tot de verbeelding hebben gesproken als het begrip chaos, getuige de vele boeken die er de afgelopen jaren over dit onderwerp verschenen zijn.

#### **H6. Toepassingen**

Dat wiskunde veel gebruikt wordt, hoeft waarschijnlijk niemand verteld te worden. Belangrijk voorbeeld is de statistiek. Net zo belangrijk is de numerieke wiskunde, waarin men methoden ontwikkelt om grootschalige computerberekeningen zo efficiënt mogelijk te laten verlopen. Denk maar aan simulaties van windtunnelproeven, industriële apparatuur, klimaatmodellen en het weer. Dan is er ook nog operations research. Dit is een tak van wiskunde die zich na de tweede wereldoorlog ontwikkeld heeft en die zijn ontstaan dankt aan de steeds groter wordende logistieke

problemen in grote organisaties. Voor alle drie genoemde richtingen in de wiskunde bestaan er over de wereld vele instituten die zich op deze disciplines toeleggen.

Ook de intrede van de communicatie (telex en telefonie) en het digitale tijdperk is belangrijk geweest voor de wiskunde en omgekeerd. In dit kader zijn er twee terreinen die de laatste tijd bijzondere aandacht hebben gekregen, ook in de media. Allereerst de coderingstheorie. Hierin ontwikkelt men methoden die het mogelijk maken om fouten in communicatie ten gevolge van ruis en storing te corrigeren. In uw CD-speler bevindt zich apparatuur die gebruikt maakt van dergelijke technieken om eventuele krasjes in de CD niet door te laten klinken. Ten tweede is daar de cryptografie, of geheimschriftkunde. Vroeger belangrijk voor communicatie tussen de Europese koningen, tegenwoordig als u uw credit card nummer op een website intikt. Ter illustratie gaan we in op de zogenaamde 'public key cryptografie'.

### Voorbeelden

1) Een volmaakt getal: wanneer de som van de delers hetzelfde getal weer vormt. Dus:  $6 = 3 + 2 + 1$   
(Zes is deelbaar door 1, 2 en 3)

Of,  $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$

2) Zoek een priemgetal dat bestaat uit 4 cijfers.

(Kun je 1027 te delen door andere getallen?)

3) Het optellen van  $x^2$ -e machten:  $x + x = x$

Dat werkt met het getal 2, maar dat lukt niet met derdemachten.

### Aanbevolen literatuur en websites

Enigszins in het verlengde van bovenstaande voordrachten ligt het volgende, op mini-pocket formaat uitgevoerde, en door een gerenommeerd wiskundige geschreven:

T.Gowers, *Wiskunde*, Het Spectrum 2003

Mocht u in deze voordrachten uitleg over Fibonacci-getallen, driehoek van Pascal, etc gemist hebben, het volgende boek voor kinderen, maar ook volwassenen, geeft een allereerste aanzet:

H.M.Enzensberger, *De telduivel*, Bezige Bij 1999

Er zijn diverse boeken van Ian Stewart, een bekend popularisator van wiskunde, die een brede selectie uit de wiskunde behandelen. In het Nederlands vertaald:

I.Stewart, *Turings tijger*, Aramith en Epsilon Uitgaven 1994

I.Stewart, *Over sneeuw kristallen en zebrastrepen*, Uniepers 2003

Er zijn nog meer boeken van Stewart, in het Engels, waaronder:

I.Stewart, *From here to infinity*, Oxford University Press 1996

De volgende twee boeken van Simon Singh zijn echte aanraders. Het eerste gaat over de Laatste Stelling van Fermat en bevat veel over de geschiedenis van de getaltheorie:

S. Singh, *Het laatste raadsel van Fermat*, Arbeiderspers 1998

Het tweede gaat over de cryptografie vanaf de Romeinen tot nu en is als een spannend verhaal geschreven:

S. Singh, *Code*, Arbeiderspers 2000

Over Chaos is heel veel verschenen. We noemen er twee, in beiden komen nauwelijks formules voor. Het eerste is uitgebreid en op pakkende manier (in het Engels) geschreven:

J. Gleick, *Chaos*, Vintage 1998

Van het volgende, zeer lezenswaardige boek, zijn twee van de auteurs zelf werkzaam op het gebied:

H. W. Broer, J. van de Craats en F. Verhulst, *Chaostheorie*, Epsilon Uitgaven 2003

Bovenstaande boeken zijn voor een breed publiek bedoeld en bevatten bijvoorbeeld nauwelijks formules. Voor wie wat dieper op de zaken in wil gaan, kunnen wij de boeken uit de Epsilon-reeks aanbevelen. Een aantal daarvan is zeer toegankelijk, een aantal andere vergt wat meer van de lezer. Zie: [www.epsilon-uitgaven.nl](http://www.epsilon-uitgaven.nl). Vaak zijn er exemplaren bij Academische boekhandels te vinden.

Samen met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren geeft Epsilon de zogenaamde Zebra-reeks uit. Boekjes van niet meer dan 50 bladzijden, bestemd voor een werkstuk op de middelbare school. Ook geschikt voor andere belangstellenden, zie de website van Epsilon Uitgaven.

Er is een groot aantal websites dat de moeite van het bezoeken waard is en voor de meeste onderwerpen kunt u het beste een zoekmachine (Google) inschakelen. We noemen een paar websites expliciet.

Veel feitenmateriaal over priemgetallen is te vinden op:

<http://www.utm.edu/research/primes/>

Een schitterende site, gewijd aan de geschiedenis van de wiskunde, met veel biografien, maar ook geschiedenis van onderwerpen, is te vinden op: <http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/>

Tenslotte noem ik een wiskundige encyclopedie, tamelijk Spartaans, maar met veel onderwerpen, waaronder veel geavanceerds: <http://mathworld.wolfram.com/>

## Colofon

Home Academy geeft hoorcolleges uit voor thuis en onderweg. Direct te downloaden of onbeperkt te beluisteren in de Home Academy Club. Interessante onderwerpen, van geschiedenis tot natuurwetenschappen, voorgedragen door boeiende sprekers. Zo kan je kennis opdoen in de auto, in de trein, op de fiets of thuis op de bank. Download de Home Academy app voor het beluisteren van onze hoorcolleges op een mobiel of tablet.

Kijk verder op [www.home-academy.nl](http://www.home-academy.nl)

**Uitgave** Home Academy Publishers  
Middelblok 81  
2831 BK Gouderak  
Tel: 0182 – 370001  
E-mail: [info@home-academy.nl](mailto:info@home-academy.nl)

Opname	Sandro Ligtenberg (Utrecht, 31 augustus 2004)
Stem Inleiding	F.C. van Nispen tot Sevenaer
Muziek Intro	Cok Verweij
Mastering	Frits de Bruijn
Vormgeving	Floor Plikaar

© Hoorcollege Copyright 2004 Home Academy Publishers B.V.  
ISBN 978 90 8530 092 2  
NUR 919, 77, 78

Alle rechten voorbehouden. Behoudens de in of krachtens de Auteurswet van 1912 gestelde uitzonderingen, mag niets uit deze uitgave worden vervoelvoudigd, uitgeleend, verhuurd, uitgezonden, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door (foto)kopieën, opnamen of enig andere manier, zonder voorafgaand schriftelijk toestemming van de uitgever.